Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

4η Εβδομάδα, 1η και 2η Διάλεξη

§5. **Ύπαρξη ολικής λύσης του προβλήματος** Cauchy

Θα ξεκινήσουμε με μια απλή ικανή συνθήκη που μας εξασφαλίζει την ύπαρξη της ολικής λύσης.

Θεώρημα 5.1. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και ικανοποιεί την συνθήκη του Lipschitz ως προς y σε μια λωρίδα $a \le x \le b$, $-\infty < y < +\infty$. Τότε για οποιοδήποτε $(x_0, y_0) \in \Omega$ υπάρχει μια και μοναδική λύση της εξίσωσης (0.1) ορισμένη στο $[a, b]$ που ικανοποιεί την συνθήκη (0.2).*

Απόδειξη. Όπως πάντα συμβολίζουμε με K τη σταθερά *Lipschitz* η οποία σύμφωνα με τις προϋποθέσεις είναι ίδια για όλες τις τιμές της y. Παίρνουμε ως $\phi_0(x)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $\phi_0(x_0) = y_0$. Όλες οι διαδοχικές προσεγγίσεις

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \phi_{n-1}(\xi))d\xi$$

υπάρχουν στο διάστημα $[a, b]$ και είναι συνεχείς, άρα είναι φραγμένες στο $[a, b]$. Θα δείξουμε ότι οι διαδοχικές προσεγγίσεις συγκλίνουν στην λύση του προβλήματος αρχικών τιμών στο διάστημα $[a, b]$. Έστω

$$\max_{x\in[a,b]} |\phi_1(x) - \phi_0(x)| = N.$$

Τότε

$$|\phi_2(x)-\phi_1(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi_1(\xi))-f(\xi, \phi_0(\xi))]d\xi \Big| \le K \Big| \int_{x_0}^{x} |\phi_1(\xi)-\phi_0|d\xi \Big| \le$$

$$\le K| \int_{x_0}^{x} N d\xi| = \frac{|x - x_0|}{1} NK,$$

$$|\phi_3(x) - \phi_2(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \phi_2(\xi)) - f(\xi, \phi_1(\xi))]d\xi \Big| \le$$

$$K \Big| \int_{x_0}^{x} |\phi_2(\xi) - \phi_1(\xi)|d\xi \Big| \le NK^2 \Big| \int_{x_0}^{x} |\xi - x_0|d\xi \Big| \le \frac{(x - x_0)^2}{2} NK^2.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Και γενικώς

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \le \frac{|x - x_0|^n}{n!} NK^n.$$

Συνεπώς η σειρά

$$\frac{|x - x_0|}{1!} NK + \frac{|x - x_0|^2}{2!} NK^2 + \cdots + \frac{|x - x_0|^n}{n!} NK^n + \cdots$$

συγκλίνει για όλες τις τιμές $|x - x_0|$ (από κριτήριο $d'Alembert$). Επομένως η σειρά (1.5) ομοιόμορφα συγκλίνει στο διάστημα $[a, b]$ (από κριτήριο $Weierstrass$) οπως επίσης και η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεις συγκλίνουν. Απο αυτό προκύπτει το ζητούμενο (βλ. την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1)

□

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$|f(\xi, \phi_m) - f(\xi, \phi_{m-1})| \leq K|\phi_m - \phi_{m-1}|$$

με την ίδια σταθερά K όποιες και να είναι οι ϕ_m, ϕ_{m-1}.

Ευκολά διαπιστώνουμε ότι π.χ. η γραμμική εξίσωση

$$y' = \alpha(x)y + \beta(x)$$

με συνεχείς στο $[a, b]$ συναρτήσεις $\alpha(x)$ και $\beta(x)$ επαληθεύει τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.1, όπως επήσης και η εξισώσεις

$$y' = \alpha(x)\sin\, y + \beta(x), \quad y' = \alpha(x)\sin^2\, y + \beta(x).$$

Προφανώς οι

$$f = 1 - y^2, \quad f = \sqrt{y} \;\text{ και }\; f = y^2$$

δεν πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος όμως τα προβλήματα

$$y' = 1 - y^2, \quad y(0) = 0 \;\text{ και }\; y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

έχουν ολική λύση ενώ το πρόβλημα

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1$$

δεν έχει. Για να καταλάβουμε τι σημβαίνει σε αυτές τις περιπτώσεις ας θυμηθούμε το Θεώρημα 1.1 ($Picard$) και την απόδειξή του. Είχαμε αποδείξη την ύπαρξη της μοναδικής λύσης σε ένα διάστημα $[x_0 - h, x_0 + h] \subset (a, b)$, $h > 0$. Ένα εύλογο ερώτημα είναι γιατί αφού κατασκευάσαμε τη λύση στο $[x_0 - h, x_0 + h]$ δεν μπορούμε να πάρουμε αρχική συνθήκη στο σημείο $x_0 + h$ και να κινηθούμε προς τα δεξιά κατασκευάζοντας τη λύση σε κάποιο διάστημα $[x_0 + h,\, x_0 + h + h_1]$ μετά στο $[x_0 + h + h_1,\, x_0 + h + h_1 + h_2]$ ... $[x_0 + h + ... + h_{n-1},\, x_0 + h + ... + h_{n-1} + h_n]$ και συνεχίζοντας να φτάσουμε στο σημείο b; Παρομοίως προς τα αριστερά μέχρι να φτάσουμε στο σημείο a, κατασκευάζοντας έτσι την ολική λύση. Προφανώς, σε κάποιες περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό, και σε κάποιες όχι. Γιατί όμως δεν είναι εφικτό πάντα; Η απάντηση είναι απλή: διότι εν γένει $h_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ και μάλιστα αρκετά γρήγορα έτσι ώστε

$$x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n < b' < b,$$

με αποτέλεσμα να μην φτάσουμε ποτέ στο σημείο b (ή παρομοίως στο σημείο a ή και στα δύο). Άρα για να μπορέσουμε να φτάσουμε στο σημείο b πρέπει τα h_n να μην τείνουν στο μηδέν ή τουλάχιστον να μην τείνουν στο μηδέν πολύ γρήγορα έτσι ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n \geq b - x_0.$$

Το μήκος του διαστήματος όπου υπάρχει η τοπική λύση καθορίζεται από την σχέση (1.2) και από τον περιορισμό ότι τα τρίγωνα ADB και AEC (βλ. σχήμα 2.1α) ανήκουν στο $\mathcal{P}$ και οι διαδοχικές προσεγγίσεις βρίσκονται σε αυτά τα τρίγωνα. Δηλαδή (βλ. (1.2), (1.7))

$$h < \min\{\frac{1}{2K}, \frac{Y_0}{M}\}.$$

Γενικά η σταθερά K εξαρτάται από την επιλογή του $\mathcal{P}$ (ουσιαστικά από την επιλογή του Y_0) και μπορεί να τείνει στο άπειρο καθώς το Y_0 μεγαλώνει. Αν είναι εφικτό να προσδιορίσουμε την σταθερά K ανεξάρτητα από την επιλογή του Y_0 και να εξασφαλίσουμε ότι το κλάσμα Y_0/M δεν τείνει στο μηδέν καθώς το Y_0 μεγαλώνει, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα $h > 0$ και $h_n = h$ και να φτάσουμε στο σημείο b σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων.

Η K μπορεί να είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του Y_0 αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η λύση που ψάχνουμε (αν υπάρχει) είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Τέτοιου είδους εκτιμήσεις, όπως γνωρίζουμε, ονομάζονται $a\,priori$ (εκ των προτέρων) εκτιμήσεις. Πράγματι, έστω

$$|y(x)| \leq C_0, \quad \forall x \in [c, d].$$

Για απλότητα θα υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y, τότε από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένα $\eta \in [y_1, y_2]$ τ.ω.

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \eta)||y_1 - y_2| \leq K|y_1 - y_2|$$

με

$$K = \max_{x\in[a,b],y\in\mathbf{R}} |f_y(x, y)| = \max_{x\in[a,b],|y|\leq C_0,} |f_y(x, y)| < \infty.$$

Επίσης έχουμε ότι

$$M = \max_{x\in[a,b],y\in\mathbf{R}} |f(x, y(x))| = \max_{x\in[a,b],|y|\leq C_0} |f(x, y(x))| = L < \infty.$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι η λύση y δεν μπορεί να βγεί από το $[-C_0, C_0]$. Αφού το M δεν μεγαλώνει όταν $|y| \geq C_0$, μπορούμε να επιλέξουμε $Y_0 > M$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε

$$\frac{1}{2K} \leq \frac{Y_0}{M}. \tag{5.1}$$

Άρα το σταθερό βήμα h θα έχει μήκος γνησίως μικρότερο του $1/2K$, π.χ.

$$h = h_n = \frac{1}{3K}.$$

Έτσι καταλήγουμε σε μια άλλη ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει τη ολική ύπαρξη. Ας την διατυπώσουμε ως θεώρημα.

Θεώρημα 5.2. *Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως προς x και παραγωγίσιμη προς y σε ένα χωρίο $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ που περιέχει το ορθογώνιο $(a, b) \times (-C_0, C_0)$. Υποθέτουμε ότι για τη λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) (αν υπάρχει) ισχύει $|y(x)| \leq C_0$ και ότι*

$$\max_{[a,b]\times[-C_0,C_0]} |f_y(x, y)| \leq K < \infty.$$

Τότε για οποιοδήποτε $(x_0, y_0) \in (a, b) \times (-C_0, C_0)$ υπάρχει μια και μοναδική λύση του προβλήματος (0.1), (0.2) ορισμένη σε όλο το (a, b).

Αν δέν έχουμε $a\,priori$ εκτιμήση της λύσης (δεν ξέρουμε που "βρίσκεται" η y), τότε η (5.1) δεν ισχύει. Φερειπείν για $f(x, y) = y^2$ θα έχουμε

$$\frac{Y_0}{M} = \frac{Y_0}{(Y_0 + |y_0|)^2} \to 0 \;\; \text{καθώς} \;\; Y_0 \to \infty,$$

εδώ προφανώς το μέγιστο M της y^2 στο $[y_0 - Y_0, y_0 + Y_0]$ είναι $(Y_0 + |y_0|)^2$. Επίσης εύκολα διαπιστώνουμε ότι σε αυτή τη περίπτωση και $1/2K \to 0$ καθώς $Y_0 \to \infty$.

Παράδειγμα 5.1. Έστω ότι οι $k(x)$ και $g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε
$$0 < g_0 \le g(x) \le g_1, \quad 0 < k_0 \le k(x) \le k_1,$$
όπου $g_i,\ k_i, i = 0, 1$ σταθερές.

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα
$$y'(x) = g(x) - k(x)y^2(x), \quad y(0) = 0 \tag{5.2}$$
έχει ολική λύση στον $\mathbf{R}$.

Λύση. Ξέρουμε ότι (βλ. Ασκηση 4.4 στην προηγούμενη παράγραφο)
$$|y(x)| < \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$
και συνεπώς
$$\max_{x,y\in\mathbf{R}} |g(x) - k(x)y^2| = \max_{x\in\mathbf{R},\, |y|\le\sqrt{g_1}/\sqrt{k_0}} |g(x) - k(x)y^2| \le g_1 + k_1\frac{g_1}{k_0}.$$
Έστω
$$\mathcal{P} = [-l, l] \times [-Y_0,\, Y_0]$$
με Y_0 που θα διαλέξουμε πιο κάτω και τυχαίο $l > 0$ το οποίο το επιλέγουμε όσο θέλουμε μεγάλο. Στο $\mathcal{P}$ και σε οποιοδήποτε υποσύνολό του ισχύει
$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |g(x) - k(x)y_2^2 - g(x) + k(x)y_1^2| \le$$
$$\max_{x\in[-l,l]} k(x)|y_2^2 - y_1^2| = \max_{x\in[-l,l]} k(x)(|y_2| + |y_1|)|y_2 - y_1| \le$$
$$K|y_2 - y_1| \ \text{ με } \ K = 2k_1\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}.$$
Το Θεώρημα 1.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης στο διάστημα $[-h, h]$ όταν
$$h < \frac{1}{2K} \ \text{ και } \ h < \frac{Y_0}{M} = Y_0\frac{k_0}{g_1(k_0 + k_1)}.$$
Παίρνουμε
$$Y_0 = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}$$
και έχουμε
$$\frac{Y_0}{M} > \frac{1}{2K}.$$
Άρα
$$h < min\{\frac{1}{2K},\ \frac{Y_0}{M}\} = \frac{1}{2K} = \frac{\sqrt{k_0}}{4k_1\sqrt{g_1}}.$$
Μπορούμε να πάρουμε φερ ειπέιν
$$h = \frac{\sqrt{k_0}}{5k_1\sqrt{g_1}}.$$
Αν θα πάρουμε την αρχική συνθήκη στο h θα έχουμε τη λύση στο $[h, 2h]$, παίρνοντας την αρχική συνθήκη στο $2h$ κατασκευάζουμε τη λύση στο $[2h, 3h]$ ... $[nh, (n+1)h]$... . Προφανώς σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (με σταθερό

βήμα μήκους h) θα φτάσουμε στο σημείο l όσο μεγάλο και αν είναι. Παρομοίως για αρνητικά x. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία $\big(nh, y(nh)\big),\ \ n = 1, 2, ...$ ανήκουν στο χωρίο $\mathcal{P}$ αφού

$$|y(nh)| \leq \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{k_0}}.$$

⋆